Теория относительности

Данное методическое пособие написано для одиннадцатиклассников. Оно охватывает следующие темы единого госэкзамена по физике.

- Инвариантность скорости света. Принцип относительности Эйнштейна.
- Полная энергия. Связь массы и энергии. Энергия покоя.

Главная цель пособия — прояснить основы специальной теории относительности. Поэтому мы обсуждаем много вопросов, выходящих за рамки ЕГЭ по физике (но не за рамки школьной программы).

Пособие может пригодиться студентам физических специальностей в качестве ознакомительного чтения по теории относительности.

Содержание

1 Описание движения в механике

Классическая механика Ньютона хорошо описывает движение макроскопических тел с небольшими скоростями. Когда скорость движения приближается к скорости света, механика перестаёт работать и уступает место специальной теории относительности (СТО).

Давайте вспомним для начала, как описывается движение в классической механике. Обсуждаемые понятия понадобятся нам в дальнейшем при изложении основ СТО.

1.1 Механическое движение

И в классической механике, и в специальной теории относительности мы интересуемся описанием так называемого механического движения.

Механическое движение — это изменение положение тела (или его частей) в пространстве относительно других тел с течением времени.

Полёт брошенного камня, вращение колеса, движение спутника по орбите — всё это примеры механического движения.

Если тело A меняет своё положение относительно тела B, то и тело B меняет своё положение относительно тела A. Иначе говоря, если тело A движется относительно тела B, то и тело B движется относительно тела A. Механическое движение является *относительным* — для описания движения необходимо указать, относительно какого тела оно рассматривается.

Так, например, можно говорить о движении поезда относительно земли, пассажира относительно поезда, мухи относительно пассажира и т. д. Понятия абсолютного движения и абсолютного покоя не имеют смысла: пассажир, покоящийся относительно поезда, будет двигаться с ним относительно столба на дороге, совершать вместе с Землёй суточное вращение и двигаться вокруг Солнца.

Тело, относительно которого рассматривается движение, называется *телом отсчёта*.

1.2 Система отсчёта

Основной задачей механики является определение положения движущегося тела в любой момент времени. Для решения этой задачи удобно представить движение тела как изменение координат его точек с течением времени. Чтобы измерить координаты, нужна система координат. Чтобы измерять время, нужны часы. Всё это вместе образует систему отсчёта.

Система отсчёта — это тело отсчёта вместе с жёстко связанной с ним («вмороженной в него») системой координат и часами.

Так, на рис. 1 изображена точка M, движение которой мы хотим описывать, и участок её траектории. Движение точки M рассматривается в системе координат $OXYZ$, связанной с телом отсчёта O.

Решить основную задачу механики для точки M — это найти её координаты как функции времени: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Если найдена зависимость координат тела от времени, то движение тела считается полностью описанным.

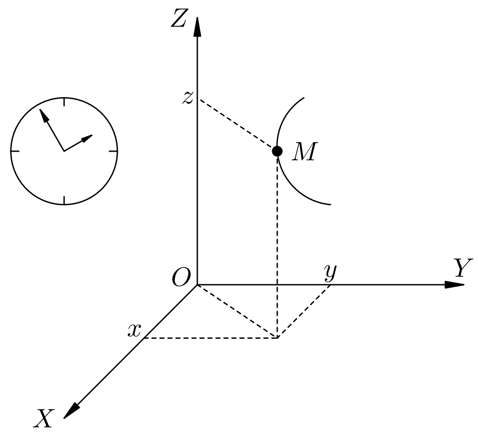

Рис. 1. Система отсчёта

Имеется бесконечное множество систем отсчёта, связанных с различными телами отсчёта. Какую систему отчёта лучше выбрать? Общего ответа на этот вопрос дать нельзя — выбор всегда диктуется конкретной задачей.

Существует, тем не менее, важнейший класс систем отсчёта, которые называются инерциальными. Именно в этих системах справедливы основные законы механики: второй и третий законы Ньютона.

1.3 Инерциальные системы отсчёта

Все тела в природе взаимодействуют друг с другом. Однако в некоторых ситуациях воздействия на данное тело со стороны других тел можно не принимать во внимание.

Так, космический корабль в далёком межзвёздном пространстве практически не испытывает гравитационного притяжения объектов Вселенной из-за их колоссальной удалённости[1]. Лежащий на столе карандаш притягивается к Земле, но действие Земли компенсируется упругой реакцией стола, и поэтому карандаш находится в покое, словно никакие силы на него вообще не действуют.

Во всех подобных случаях будем называть тело свободным. *Тело называется свободным, если действия на него со стороны других тел или пренебрежимо малы, или компенсируют друг друга.*

Повседневный опыт говорит о том, что свободные тела покоятся — как упомянутый карандаш на столе. Поэтому долгое время считалось, что для поддержания какого бы то ни было движения необходимо осуществлять нескомпенсированное внешнее воздействие со стороны других тел.

Но это оказалось неверным. Как установил Галилей, свободное тело может не только находиться в покое, но и двигаться равномерно и прямолинейно! Именно состояние равномерного прямолинейного движения является «естественным» для свободного тела; покой же — частный случай такого движения со скоростью, равной нулю.

Следует учесть, однако, что движение относительно: оно рассматривается не само по себе, а в определённой системе отсчёта. В различных же системах отсчёта движение данного тела будет выглядеть по-разному.

Так, дом с точки зрения неподвижно стоящего наблюдателя будет находиться в покое: сила притяжения дома к Земле компенсируется силой упругости почвы. Если наблюдатель движется относительно земли равномерно и прямолинейно, то и дом относительно наблюдателя будет совершать равномерное прямолинейное движение в полном соответствии с выводами Галилея — ведь дом является свободным телом!

Но если у наблюдателя заплетаются ноги и он бредёт, шатаясь, то ему будет казаться, что дом раскачивается в разные стороны. В этой системе отсчёта дом, будучи свободным телом, совершает отнюдь не равномерное и прямолинейное движение.

Таким образом, утверждение Галилея верно не во всей общности: *не во всякой* системе отсчёта свободное тело движется равномерно и прямолинейно. Но всё же такие системы отсчёта существуют (существуют «хорошие» наблюдатели!), и в этом состоит первый закон Ньютона: *существуют такие системы отсчёта, относительно которых свободное тело движется равномерно и прямолинейно.*

Свойство свободного тела сохранять скорость неизменной называется *инерцией*. Поэтому первый закон Ньютона называют ещё *законом инерции*. Равномерное прямолинейное движение свободного тела называется *движением по инерции*.

Инерциальная система отсчёта — это система отсчёта, относительно которой свободное тело движется равномерно и прямолинейно.

Таким образом, первый закон Ньютона — это утверждение о *существовании* инерциальных систем отсчёта. В инерциальных системах отсчёта механические явления описываются наиболее просто.

[1] Гравитационные силы обратно пропорциональны квадрату расстояния между телами

В действительности инерциальных систем отсчёта существует бесконечно много: всякая система отсчёта, которая движется относительно инерциальной системы равномерно и прямолинейно, сама является инерциальной.

Система отсчёта, которая движется относительно инерциальной системы отсчёта с ускорением, является *неинерциальной*. В такой «плохой» системе отсчёта свободное тело будет двигаться с ускорением, что усложнит описание его движения.

С достаточно высокой точностью можно считать инерциальной *гелиоцентрическую* систему (систему Коперника). Это система отсчёта, начало которой помещено в центре Солнца, а координатные оси направлены на три какие-либо удалённые звезды, которые можно принять за неподвижные.

Инерциальной часто можно считать систему отсчёта, связанную с земной поверхностью. Это, однако, более грубое приближение — ведь при этом мы отвлекаемся от вращения Земли вокруг собственной оси и вокруг Солнца. Так, звезда, неподвижная в системе Коперника, в земной системе будет совершать сложное движение в виде наложения двух вращений (суточного и годового). Однако в большинстве явлений, происходящих на поверхности Земли, неинерциальность земной системы отсчёта практически никак не сказывается, и ею можно пренебречь.

Галилей заметил, что, находясь в трюме корабля, никакими механическими опытами невозможно установить, покоится ли корабль или движется равномерно и прямолинейно. Стало быть, инерциальные системы отсчёта совершенно неотличимы друг от друга с точки зрения законов механики — в этом состоит принцип относительности Галилея.

Впоследствии Эйнштейн распространил этот принцип с механических опытов на любые физические эксперименты. Оказывается, не выглядывая из корабля, мы не сможем отличить покой от равномерного прямолинейного движения, наблюдая не только механические, но и вообще любые физические явления (тепловые, электромагнитные, ядерные...). Общий принцип относительности Эйнштейна лёг в основу специальной теории относительности.

К последовательному рассмотрению принципов относительности Галилея и Эйнштейна мы сейчас и переходим.

2 Принцип относительности Галилея

Изучение теории относительности Эйнштейна мы начинаем с более глубокого рассмотрения принципа относительности Галилея. Это позволит нам лучше понять, каковы были предпосылки создания теории относительности.

Рассмотрим мысленный эксперимент с кораблём, предложенный Галилеем.

2.1 Наблюдатель на корабле

Представьте себе, что вы находитесь в каюте корабля. Никакого движения в пространстве вы не ощущаете — вам кажется, что корабль стоит на месте. Но вас всё же интересует, покоится ли корабль или движется равномерно и прямолинейно. Можете ли вы установить это, не выглядывая в иллюминатор?

Допустим, что с данной целью вы производите всевозможные эксперименты, наблюдая различные *механические* явления в вашей каюте. Вы исследуете свободное падение тел, соскальзывание тела с наклонной плоскости, вращательное движение, колебания маятников, распространение звуковых волн. . . Вам детально известен ход этих явлений в неподвижной лаборатории на земле, и теперь вы пытаетесь найти какие-либо отклонения в их протекании, вызванные равномерным прямолинейным движением судна.

Никаких отклонений обнаружить не удастся! Поставив в каюте корабля любой механический эксперимент и сопоставив его с аналогичным экспериментом на земле, вы увидите, что полученные результаты не отличаются друг от друга. Например, вы бросаете мячик со скоростью 5 м/с под углом 60° к горизонту относительно палубы. Оказывается, мячик на корабле опишет ровно ту же самую траекторию, что и на берегу при тех же начальных условиях (скорость и угол броска).

Равномерное прямолинейное движение корабля никак не сказывается на протекании механических явлений на этом корабле. Поэтому никакой опыт из механики, проведённый в лаборатории корабля, не в состоянии определить, покоится ли корабль или движется равномерно и прямолинейно.

Систему отсчёта, связанную с землёй, во многих ситуациях можно считать инерциальной[2]. Система отсчёта корабля, движущаяся относительно земной системы отсчёта равномерно и прямолинейно, также будет инерциальной. Мы приходим к выводу, что с точки зрения механических явлений инерциальные системы отсчёта совершенно равноправны: никакой механический эксперимент не в состоянии выделить и сделать привилегированной какую-то одну инерциальную систему отсчёта по сравнению с остальными.

Это и есть принцип относительности, открытый Галилеем.

Принцип относительности Галилея. *Всякое механическое явление при одних и тех же начальных условиях протекает одинаково в любой инерциальной системе отсчёта.*

2.2 Инвариантность законов механики

Принцип относительности Галилея означает, что законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта. А именно, математическая форма второго и третьего законов Ньютона не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой. Давайте убедимся в этом непосредственно на следующем простом примере.

Рассмотрим две системы отсчёта: K и K'. Координатные оси этих систем сонаправлены. Систему K будем считать неподвижной. Система K' движется относительно неё с постоянной

[2]Конечно, она не инерциальна. Земля совершает суточное вращение и движется вокруг Солнца, поэтому земная лаборатория будет иметь ускорение. Но во многих задачах этим ускорением можно пренебречь.

скоростью $\vec{v}$ вдоль общего направления осей X и X' (рис. 2).

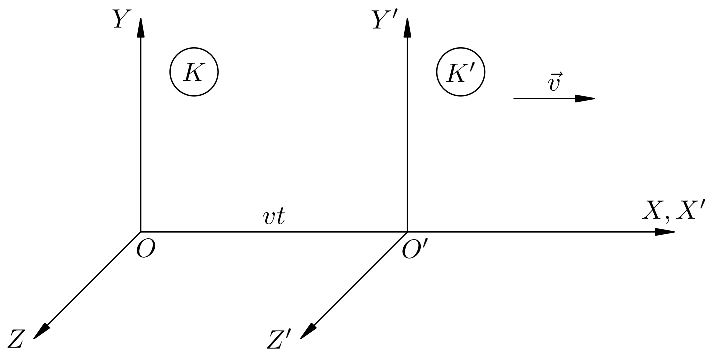

Рис. 2. Система K' движется относительно системы K

В тот момент, когда начала координат O и O' совпадали, часы обеих систем были выставлены на ноль и запущены. Стало быть, часы в системах K и K' идут синхронно, показывая одно и то же время t. В момент времени t расстояние OO' равно vt.

Нас интересует, как описывается движение тела (для определённости называемого далее *частицей*) в системах отсчёта K и K'.

Прежде всего, выясним, как связаны друг другом координаты частицы и моменты времени в обеих системах отсчёта.

Пусть в момент времени t по часам K частица имеет в системе K координаты x, y, z. Вообще, четвёрка чисел (x, y, z, t) называется *событием*. Событие состоит в том, что в данной точке пространства в данный момент времени что-то происходит — вот, например, в точке с координатами x, y, z в момент времени t оказывается наша частица.

В системе K' это же событие описывается четвёркой чисел (x', y', z', t'). А именно, местонахождение частицы в системе K' описывается координатами x', y', z', а часы K' показывают при этом время t'.

Глядя на рис. 2, совершенно ясно, что x' будет меньше x на величину vt, координата y' совпадает с y, а z' совпадает с z. Кроме того, как уже было сказано, время на часах K' и K одно и то же: $t' = t$.

Итак, имеем:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \tag{1}$$

Формулы (1) называются *преобразованиями Галилея*. Они связывают координаты и время одного и того же события, измеренные в разных инерциальных системах отсчёта: в движущейся системе K' и неподвижной системе K.

Таким образом, *преобразования Галилея в механике служат математическим описанием перехода от одной инерциальной системы отсчёта к другой*. Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из преобразований Галилея.

Пусть наша частица имеет в системе K скорость $\vec{u}$, а в системе K' — скорость $\vec{u}\,'$. Как связаны между собой эти скорости? Дифференцируем первые три равенства (1) по времени (которое одинаково в обеих системах отсчёта):

$$\dot{x}' = \dot{x} - v, \quad \dot{y}' = \dot{y}, \quad \dot{z}' = \dot{z}.$$

Производные координат по времени — это проекции скоростей:

$$u'_x = u_x - v, \quad u'_y = u_y, \quad u'_z = u_z. \tag{2}$$

Три равенства (2) можно записать в виде одной векторной формулы:

$$\vec{u}\,' = \vec{u} - \vec{v},$$

или

$$\vec{u} = \vec{u}\,' + \vec{v}.$$

Получился хорошо известный нам закон сложения скоростей: скорость тела относительно неподвижной системы отсчёта есть скорость тела относительно движущейся системы отсчёта плюс скорость движущейся системы относительно неподвижной. Мы видим, таким образом, что *закон сложения скоростей в механике является следствием преобразований Галилея.*

Дифференцируем по времени ещё раз — на сей раз соотношения (2). Производная постоянной величины v обращается в нуль, и мы получаем равенство ускорений:

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = a_z,$$

или

$$\vec{a}\,' = \vec{a}.$$

Итак, *ускорение частицы одинаково во всех инерциальных системах отсчёта.* Это ещё одно следствие преобразований Галилея.

Теперь запишем второй закон Ньютона для нашей частицы в системе K:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \tag{3}$$

При переходе в систему K' ускорение частицы $\vec{a}$, как мы выяснили, остаётся прежним. А что можно сказать об остальных двух величинах, входящих в (3), — массе и силе?

Масса есть мера инертности тела; масса показывает, в какой степени тело «сопротивляется» изменению скорости. Но приращение скорости Δu нашей частицы будет одним и тем же в любой инерциальной системе отсчёта. Следовательно, *масса частицы m во всех инерциальных системах отсчёта одинакова.*

Силы в механике зависят от расстояний между телами и, быть может, скоростей тел друг относительно друга. Но расстояние между двумя точками пространства одинаково во всех инерциальных системах отсчёта. Скорость одной частицы относительно другой также не зависит от того, в какой инерциальной системе отсчёта рассматривается движение. Стало быть, *сила $\vec{F}$ одинакова во всех инерциальных системах отсчёта.*

Величины и соотношения, не меняющиеся при определённых условиях, часто называются *инвариантными.* Так, ускорение, масса и сила инвариантны относительно выбора инерциальной системы отсчёта. Поэтому второй и третий законы Ньютона во всех системах отсчёта имеют одинаковый вид, т. е. инвариантны относительно преобразований Галилея.

Законы механики инвариантны относительно преобразований Галилея — такова альтернативная формулировка принципа относительности Галилея. Подчеркнём, что речь идёт об инвариантности математической формы законов механики. В результате этой инвариантности одно и то же механическое явление, наблюдаемое при одних и тех же начальных условиях, будет протекать одинаково во всех инерциальных системах отсчёта.

3 Принципы СТО

Принцип относительности Галилея, подробно рассмотренный в предыдущем разделе, говорит о том, что никакие лабораторные опыты механики не помогут определить, покоится ли лаборатория или движется равномерно и прямолинейно.

Но возникает закономерный вопрос: а кто заставляет нас ограничиваться лишь механическими явлениями? Давайте перейдём в другие области физики: будем наблюдать в движущейся лаборатории распространение тепла или света, ставить опыты с электромагнитными колебаниями, изучать ядерные процессы... Раз уж механика нам не помощник, то, быть может, где-нибудь в молекулярной физике, электродинамике, оптике, атомной или ядерной физике найдутся явления, на протекании которых скажется равномерно-прямолинейное движение лаборатории? Тогда, сопоставив ход таких явлений в неподвижной и в движущейся системах отсчёта, мы зафиксируем факт движения и сможем измерить его скорость.

С развитием электродинамики поначалу казалось, что так оно и есть. Дело в том, что, в отличие от законов механики Ньютона, уравнения Максвелла оказались не инвариантными относительно преобразований Галилея.

3.1 Гипотеза о мировом эфире

Из уравнений Максвелла следует, например, что свет в вакууме распространяется со скоростью $c = 300000$ км/с в любом направлении, причём эта скорость не зависит от того, покоится ли источник света или движется.

Физиков данный факт ничуть не удивлял: свет рассматривался как колебания особой всепроникающей среды — неподвижного мирового эфира. Считалось, что электромагнитные волны распространяются в эфире аналогично звуковым волнам в воздухе, а со звуком ведь дело обстоит точно так же: сигнал от бибикнувшего автомобиля бежит в воздухе во все стороны со скоростью примерно 340 м/с вне зависимости от скорости, с которой движется автомобиль.

А теперь представьте себе, что вы находитесь в звездолёте, который мчится в космическом вакууме со скоростью $v = 50000$ км/с относительно удалённых звёзд. Вы сидите лицом по ходу движения звездолёта и смотрите на лампочку, которая находится в его носовой части.

Свет от лампочки, не обращая внимания на её движение, перемещается относительно звёзд со скоростью c. Вы движетесь навстречу свету со скоростью v; стало быть, относительно вас свет имеет скорость $c + v = 350000$ км/с. Вы измеряете эту скорость, сопоставляете её с известным значением c и приходите к выводу, что двигаетесь со скоростью 50000 км/с! Таким образом, электромагнитные явления вроде бы позволяют отличить покой от равномерного прямолинейного движения.

У вас, кстати, может возникнуть вопрос: а чем плох аналогичный эксперимент со звуком? Давайте бибикнем в носовой части длинного движущегося лимузина, измерим скорость звука относительно нас и опровергнем принцип относительности Галилея! Ничего не выйдет: если лимузин замкнутый (как и должно быть), то он увлекает свой воздух вместе с собой, и вы ничего не заметите[3]. А вот в звездолёте вам никуда не деться от всепроникающего «эфирного ветра», который несётся вам в лицо и увеличивает тем самым скорость света в описанном выше эксперименте с лампочкой[4].

Соответственно, многие учёные (в том числе выдающийся голландский физик Х. Лоренц) считали, что инерциальные системы отсчёта, будучи равноправными с точки зрения механики, в

---

[3]Конечно, в открытом автомобиле звук будет нестись на вас вместе с окружающим воздухом, и скорость звука действительно окажется больше; но открытый автомобиль является нарушением правил — это всё равно, что выглянуть наружу.

[4]Пытаясь спасти принцип относительности Галилея применительно к электродинамике, Герц предположил, что эфир также увлекается движущимися телами — как воздух лимузином. Из этой гипотезы следовало, однако, что струя воды, увлекая эфир, должна увлекать и луч света — а в экспериментах такого не наблюдалось.

электродинамике перестают быть таковыми. Имеется выделенная, привилегированная система отсчёта, связанная с неподвижным мировым эфиром. Остальные системы отсчёта движутся относительно неё, и возникающий «эфирный ветер» меняет в них величину скорости света.

С целью обнаружения эфирного ветра в 1881 году был поставлен один из самых знаменитых физических экспериментов — опыт Майкельсона. С помощью чувствительного интерферометра производились попытки измерить скорость Земли относительно эфира. А именно, исследовалась интерференционная картина, даваемая двумя когерентными пучками света, имеющими перпендикулярные направления. Интерферометр движется относительно эфира вместе с Землёй; при вращении интерферометра меняется направление эфирного ветра относительно интерферометра, что должно сказываться на скоростях пучков и давать сдвиги интерференционной картины.

Однако никаких сдвигов обнаружено не было! Наблюдения проводились в разное время года (когда скорость Земли ощутимо меняла направление) и неизменно давали отрицательный результат. Интерферометр был настолько точный, что списать отсутствие эфирного ветра на недостаточную чувствительность прибора было нельзя.

Почему же движение Земли относительно эфира не удаётся зафиксировать? Не сомневаясь в существовании эфира, Лоренц заметил, что результаты опыта Майкельсона полностью объясняются, если сделать невероятное предположение: размеры движущегося предмета сокращаются в направлении движения! Так, если стержень длины l_0 начинает двигаться вдоль своей оси со скоростью v, то его длина становится равной

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{4}$$

Эта гипотеза, названная *лоренцевым сокращением*, не вытекала на тот момент из каких-либо физических принципов и стояла особняком, будучи призвана лишь справиться с отрицательным результатом опыта. Но тем не менее формула (4) действительно оказалась верна! Её объяснение пришло позже, уже в рамках теории относительности Эйнштейна.

3.2 Постулаты Эйнштейна

Альберт Эйнштейн — величайшая фигура в истории физики. Для разрешения трудностей, описанных выше, он отказался от некоторых сложившихся в физике устоев и предпринял весьма радикальные шаги. Сформулируем ещё раз те проблемы, с которыми столкнулась физика, и их решения, предложенные Эйнштейном.

1. Не удаётся обнаружить привилегированную систему отсчёта, связанную с неподвижным мировым эфиром.

Так её и нет вовсе. Никакого эфира не существует. Все инерциальные системы отсчёта полностью равноправны между собой, и никакими физическими опытами нельзя выделить одну из них среди остальных.

Таким образом, Эйнштейн обобщил принцип относительности Галилея с механических на вообще все физические явления.

Принцип относительности Эйнштейна. *Всякое физическое явление при одних и тех же начальных условиях протекает одинаково в любой инерциальной системе отсчёта.*

Следовательно, если ваша лаборатория находится внутри корабля, то не только механический, но и *вообще никакой* эксперимент не даст вам ответа на вопрос, покоится ли корабль или движется равномерно и прямолинейно. Вы можете ставить опыты с газами, изучать тепловые явления, наблюдать за распространением электромагнитных волн, следить за атомными и ядерными процессами, анализировать взаимодействия элементарных частиц — и нигде вам не удастся обнаружить каких-либо отклонений в протекании этих явлений, вызванных фактом равномерно-прямолинейного движения корабля.

В предыдущем разделе мы убедились в том, что законы механики имеют одинаковую математическую форму во всех инерциальных системах отсчёта: уравнения, выражающие эти законы, инвариантны относительно преобразований Галилея. Таков смысл принципа относительности Галилея. Обобщающий его принцип относительности Эйнштейна утверждает, что *любой физический закон имеет одинаковую математическую форму во всех инерциальных системах отсчёта*. Все уравнения, выражающие законы физики, должны быть инвариантны относительно перехода из одной инерциальной системы отсчёта в другую.

В частности, основные уравнения электродинамики — уравнения Максвелла — должны сохранять свою форму при таком переходе. Как же тогда быть со следующей трудностью?

2. Электродинамика противоречит механике в том, что уравнения Максвелла не инвариантны относительно преобразований Галилея.

Что ж, это проблема механики, а не электродинамики. Уравнения Максвелла блестяще работают в области электромагнитных явлений. Если преобразования Галилея не вяжутся с уравнениями Максвелла, то неверны преобразования Галилея, а не уравнения Максвелла.

Но легко сказать — преобразования Галилея неверны! Во-первых, они, казалось бы, совершенно очевидны — вам ведь не составило никакого труда в них разобраться. Чему там, собственно говоря, быть неверным?

А во-вторых — следствием преобразований Галилея, как мы видели, является закон сложения скоростей. Вы неоднократно пользовались им при решении задач. Что же получается — и закон сложения скоростей объявляется неверным?

Да, именно так! — гласил ответ Эйнштейна. Классическая механика Ньютона нуждается в глубоком, коренном пересмотре своих основных принципов. И слабый пункт классической механики состоит в том, что механические законы предполагают *мгновенность* распространения взаимодействий между телами.

Рассмотрим, например, гравитационное притяжение двух тел. Если одно из тел сместить в сторону, то, согласно закону всемирного тяготения, второе тело «почувствует» этот факт мгновенно, как только изменится расстояние от него до первого тела. Получается, что взаимодействие передаётся от одного тела к другому с бесконечной скоростью.

Эксперименты, однако, показывают, что механизм передачи взаимодействий состоит в следующем: изменение состояния тела меняет поле около него; возникшее возмущение поля начинает бежать во все стороны с некоторой *конечной* скоростью и лишь спустя определённый промежуток времени достигает другого тела. Мгновенно передающихся взаимодействий ни в каких опытах не наблюдается.

Но если взаимодействия не могут передаваться в бесконечной скоростью, то *в природе существует предельная, максимальная скорость распространения взаимодействий*. Изменённые законы механики должны учитывать наличие этой предельной скорости и, соответственно, конечность времени передачи взаимодействий между телами.

Второй постулат[5] Эйнштейна отводит исключительную роль скорости света.

Принцип инвариантности скорости света. *В каждой инерциальной системе отсчёта свет движется в вакууме с одной и той же скоростью; величина этой скорости не зависит от того, покоится или движется источник света.*

Таким образом, вышеописанный опыт с лампочкой в носовой части звездолёта нам провести не удастся: скорость света относительно наблюдателя в звездолёте будет равна c, а не $c + v$,

[5] *Постулат* в физике — это утверждение, которое служит обобщением опытных фактов и принимается без доказательства. Постулат формулирует свойства природы: «Наш мир таков, что…» Постулаты аналогичны аксиомам в геометрии. В основе любой физической теории лежат некоторые постулаты — они играют роль первичных утверждений, из которых остальные утверждения теории выводятся в качестве следствий.

и наблюдатель не сможет заметить факт движения звездолёта. Классический закон сложения скоростей применительно к скорости света не работает.

Мы увидим далее, что максимальная скорость распространения взаимодействий, присущая нашему миру, оказывается равной как раз скорости света в вакууме. Никакой сигнал, никакое тело, никакой вообще материальный объект в природе не может двигаться со скоростью, превышающей c. Величина c является фундаментальной константой, отражающей свойства мира, в котором мы живём.

Оба постулата Эйнштейна — принцип относительности и принцип инвариантности скорости света — легли в основу *специальной теории относительности (СТО)*. Эта теория затрагивает глубокие свойства пространства-времени, радикально меняя наши представления об окружающем мире[6]. Механика, построенная Эйнштейном на постулатах СТО, получила название *релятивистской* (от англ. relativity — относительность).

Новые и удивительные свойства пространства-времени и новые законы, устанавливаемые в СТО, проявляются при больших скоростях движения — и тем ярче, чем ближе мы подходим к скорости света. В повседневной жизни мы не замечаем этих релятивистских эффектов — по той простой причине, что привычные нам скорости чрезвычайно малы по сравнению со скоростью света. Во многих практических задачах можно считать скорость света бесконечной — и тогда прекрасно работает классическая механика.

Итак, классическая механика оказывается приближённой теорией и годится для небольших скоростей. Релятивистская механика используется тогда, когда скорости тел достаточно близки к скорости света — в таких ситуациях классическая механика отказывает совершенно. Классическая механика является предельным случаем релятивистской механики: формулы классической механики получаются из релятивистских формул предельным переходом $c \to \infty$.

Какие же новые свойства пространства-времени и новые физические законы открыла теория относительности? Мы будем рассказывать о них в двух следующих разделах. Здесь мы покажем лишь, что из постулатов СТО следуют весьма неожиданные и, казалось бы, парадоксальные выводы.

Рассмотрим системы отсчёта K и K' — те же, что и в предыдущем листке (рис. 3). В момент времени $t = 0$, когда их начала O и O' находятся в одной точке, в этой точке происходит световая вспышка.

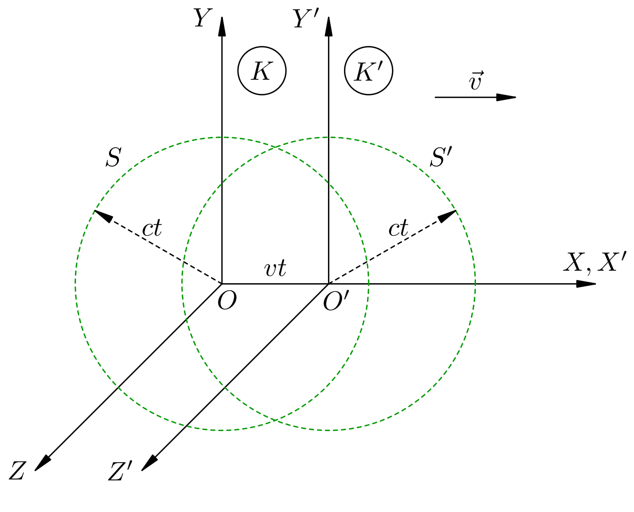

Рис. 3. Кажущийся парадокс со световой вспышкой

Где окажется волновой фронт вспышки к моменту времени t?

[6]Впоследствии Эйнштейн развил *общую теорию относительности (ОТО)*, которая описывает свойства пространства-времени при наличии гравитационного поля. Оказывается, гравитационное поле приводит к искривлению пространства-времени. ОТО настолько сложна, что рассмотрение даже самых её начал выходит далеко за рамки школьной программы. В СТО влиянием гравитации пренебрегают.

В системе K свет распространяется во все стороны со скоростью c. Поэтому в системе K вспышка достигнет сферы S радиуса ct с центром в точке O.

В системе K' скорость света также равна c. Значит, в системе K' вспышка достигнет сферы S' того же радиуса ct, но с центром в точке O'.

Однако точки O и O' к моменту t разойдутся на расстояние vt. Получается, что волновой фронт в один и тот же момент времени находится на двух разных сферах S и S'. Противоречие?

Противоречия на самом деле нет. Причина кажущегося парадокса кроется в понятии *одновременности*. На место нашего интуитивного понимания одновременности приходит чёткое определение этого термина, даваемое в СТО. Читаем следующий раздел!

4 Релятивистская кинематика

Напомним, что основной задачей механики является описание движения, а именно — выяснение того, как меняются координаты тела с течением времени.

Для описания движения нужно иметь систему отсчёта. В классической механике, как мы знаем, в систему отсчёта входят три объекта: тело отсчёта (относительно которого рассматривается движение), жёстко связанная с телом отсчёта система координат, а также часы для измерения времени. Наблюдатель, находящийся в данной системе отсчёта, имеет возможность измерять координаты тела и сопоставлять эти координаты с показаниями часов. В результате наблюдатель получает зависимость координат тела от времени; располагая такой зависимостью, он может найти скорость тела и другие кинематические величины.

4.1 Одновременность событий

Сопоставление координат тела и показаний часов — ключевой момент. Здесь мы подходим к важнейшему понятию одновременности событий. Прежде всего, процитируем Эйнштейна.

> Мы должны обратить внимание на то, что все наши суждения, в которых время играет какую-либо роль, всегда являются суждениями об *одновременных событиях*. Если я, например, говорю: «Этот поезд прибывает сюда в 7 часов», — то это означает примерно следующее: «Указания маленькой стрелки моих часов на 7 часов и прибытие поезда суть одновременные события».
>
> (А. Эйнштейн. «К электродинамике движущихся тел».)

Что такое одновременность в классической механике? Вопрос, казалось бы, ясен: события являются одновременными, если они происходят в один и тот же момент времени по часам наблюдателя. Отметим здесь два существенных момента.

- Неважно, происходят ли данные события в одной точке пространства или в различных точках. В классической механике мы спокойно говорим об одновременности пространственно разделённых событий.

- Понятие одновременности имеет абсолютный смысл: два события, одновременные в одной системе отсчёта, будут одновременными и в любой другой системе отсчёта. Во всех инерциальных системах отсчёта время течёт одинаково — это выражается равенством $t' = t$ в преобразованиях Галилея.

Такое понимание одновременности, однако, носит интуитивный характер. И, что совсем плохо, оно базируется на предположении о *мгновенности* передачи взаимодействий.

В самом деле, если сигналы от событий, происходящих в разных точках пространства, достигают наблюдателя мгновенно, то какая ему разница, насколько велико расстояние между этими событиями? Никакой задержки в приходе сигналов ведь не будет. Точно так же несущественно и то, покоится ли наблюдатель или движется — раз сигналы распространяются с бесконечной скоростью, события будут казаться наблюдателю одновременными независимо от факта его движения.

Но в действительности скорость сигнала является конечной и не может превышать скорость света в вакууме. Тем самым наше интуитивное понимание одновременности пространственно разделённых событий оказывается некорректным. Ведь если мы, держа в руках секундомер, фиксируем по нему время наступления окружающих событий и пытаемся судить об их одновременности, то нам придётся считаться с задержками прихода сигналов из различных точек пространства. Более того, эти задержки могут оказываться разными в зависимости от того, находимся ли мы в покоящейся системе отсчёта или в движущейся.

Что же получается — понятие одновременности вообще теряет смысл? Оказывается, нет! Эйнштейн предложил чёткую программу преодоления указанных трудностей. Суть её состоит в следующем: раз уж всё оказывается так плохо при измерении времени по одним-единственным часам наблюдателя, то давайте использовать *много синхронно идущих часов*, расставленных в разных точках пространства. Два события будут считаться одновременными, если совпадают показания часов, расположенных в тех точках, где произошли события.

А теперь — подробнее и по пунктам.

1. Пусть в некоторой точке пространства имеются часы. Если *в этой точке* происходит событие, то наши часы показывают время данного события. Таким образом, если в этой самой точке происходят два события, то мы всегда можем сказать, одновременны они или нет — просто сравнив показания наших часов в моменты наступления событий.

   Итак, с определением одновременности событий, происходящих в одной точке пространства, проблем нет.

2. Для определения понятия одновременности пространственно разделённых событий нам понадобится много одинаковых часов, расставленных в пространстве достаточно часто. Каждые часы показывают время событий, происходящих в той точке, где эти часы расположены.

   Чтобы была возможность судить об одновременности событий, происходящих в различных точках пространства, все эти часы должны идти *синхронно*, т. е. показывать одно и то же время. Но возникает естественный вопрос: а как этого добиться? Каким образом можно произвести синхронизацию часов?

3. Чтобы синхронизировать часы, расположенные в различных точках пространства, Эйнштейн предложил использовать световые сигналы.

   Пусть в точках A и B имеются часы. Предположим, что из точки A в точку B посылается световой сигнал, который отражается в точке B и возвращается назад в A.

   Пусть в момент отправления сигнала часы A показывали t_1, а в момент возвращения сигнала показания тех же часов A равны t_2.

   Правило Эйнштейна. *По определению, часы A и B идут синхронно, если в момент прихода сигнала в точку B показания часов B равны $(t_1 + t_2)/2$.*

   Иными словами, часы B должны показывать ровно середину промежутка между t_1 и t_2. Правило Эйнштейна иллюстрируется на рис. 4.

   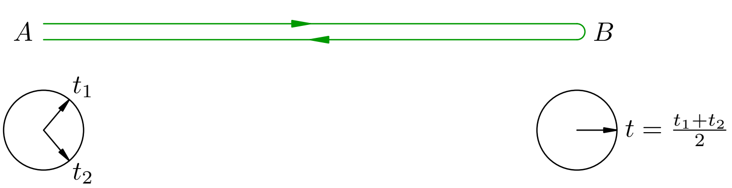

   Рис. 4. Синхронизация часов по правилу Эйнштейна

   Можно дать и другую, равносильную формулировку правила Эйнштейна.

   Произведём в середине отрезка AB вспышку света. По определению, часы A и B идут синхронно, если в моменты прихода света в точки A и B показания часов совпадают.

4. Правило Эйнштейна основано на том, что скорость света в вакууме не зависит от направления распространения света. В самом деле, ведь при синхронизации часов мы считаем,

что световой сигнал идёт с одной и той же скоростью в обоих направлениях: как от A к B, так и обратно от B к A.

Одинаковость скорости света по всем направлениям — это факт, подтверждаемый многочисленными опытами.

5. Может возникнуть следующий вопрос: а зачем вообще использовать какие-то световые сигналы? Давайте сначала поместим двое часов в точку A, поставим их одинаково, а затем перенесём одни из этих часов в точку B. Вот и получится пара синхронизированных часов в двух различных точках A и B!

   Беда заключается в том, что такой способ не согласуется с правилом Эйнштейна. Если в точке B уже имеются часы, синхронизированные по правилу Эйнштейна с часами A, то перенесённые из A часы покажут в точке B время *меньшее*, чем первые. При этом перенесённые часы будут отставать тем больше, чем с большей скоростью они двигались! Об этом свидетельствует опыт, и мы скоро поймём, почему так получается.

   Так что альтернативы правилу Эйнштейна нет: оно является простым, естественным и приводит к стройной теории, прекрасно согласующейся с экспериментом.

6. По правилу Эйнштейна мы можем синхронизировать любую пару часов. Но является ли это правило непротиворечивым? А именно, если мы синхронизировали указанным способом сначала часы A и B, а затем часы B и C, то окажутся ли при этом синхронизированными часы A и C?

   Хотелось бы думать, что да, однако из правила Эйнштейна это логически не следует (как, впрочем, не следует и ответ «нет»). Эйнштейн *постулировал* непротиворечивость своего правила: *да, часы A и C окажутся при этом синхронизированными.* Данный постулат согласуется с экспериментом; принятие этого постулата не ведёт в дальнейшем к противоречиям в теории.

7. Итак, мы получили релятивистскую систему отсчёта с большим количеством часов. Все часы идут согласованно, они синхронизированы по правилу Эйнштейна. Время каждого события (*местное время*) измеряется по часам, расположенным в том месте, где событие совершилось.

   Теперь можно дать определение одновременности событий.

   Два пространственно разделённых события в данной системе отсчёта считаются одновременными, если при наступлении этих событий совпадают показания часов, расположенных в тех точках, где события произошли.

   Можно запомнить более короткую формулировку: *события одновременны, если их местные времена совпадают.*

Как видим, существование максимальной скорости распространения сигналов ведёт к коренному пересмотру наших обыденных представлений о пространстве и времени. Оказалось, например, что понятие одновременности событий нуждается в строгом определении. Данное определение является непротиворечивым, согласуется с опытом и приводит к следствиям, весьма неожиданным с повседневной точки зрения.

Так, понятие одновременности, а также величины промежутков времени и расстояний между точками теряют свой абсолютный характер и становятся относительными, то есть зависящими от выбора той или иной системы отсчёта.

4.2 Относительность одновременности

Давайте ещё раз осмыслим определение одновременности событий. Мы смогли его дать, введя предварительно единое время для нашей системы отсчёта. Это единое время задаётся множеством синхронно идущих часов, расставленных в различных точках пространства.

Тем самым понятие одновременности пространственно разделённых событий оказывается «привязанным» к данной системе отсчёта. Выясняется, что *два события, одновременные в одной системе отсчёта, могут оказаться не одновременными в другой системе отсчёта.* В этом нетрудно убедиться на следующем простом примере.

Рассмотрим вагон, который движется вправо со скоростью $\vec{v}$ (рис. 5). В точке S, находящейся в центре вагона, происходит световая вспышка. Одновременно ли свет достигнет точек A и B, расположенных соответственно на задней и передней стенке вагона?

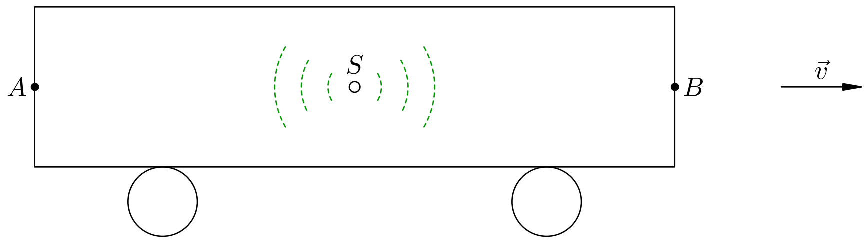

Рис. 5. Два события, одновременные в вагоне и не одновременные на земле

В системе отсчёта, связанной с вагоном, всё происходит точно так же, как в неподвижной лаборатории. По вагонным часам свет придёт в точки A и B одновременно.

Но в системе отсчёта, связанной с землёй, картина окажется иной. Точка A движется навстречу сигналу, а точка B удаляется от него; поэтому для достижения точки A свету потребуется пройти меньшее расстояние, чем для достижения точки B. Но в земной системе отсчёта скорость света будет одинакова в обоих направлениях — ведь согласно второму постулату СТО скорость света не зависит от факта движения источника. Стало быть, по земным часам свет придёт в точку A раньше, чем в точку B.

Таким образом, два события — приход сигнала от источника S в точки A и B — являются одновременными в системе отсчёта вагона и не одновременными в системе отсчёта земли.

В конце предыдущего листка было приведено противоречивое на первый взгляд рассуждение, в котором волновой фронт световой вспышки оказывался одновременно на двух различных сферах. Перечитайте это рассуждение ещё раз. Теперь становится ясно, что разрешение возникшего противоречия состоит в относительности понятия одновременности. Действительно, свет одновременно достигает поверхности сферы с центром в точке O только в системе K, но не в системе K'. И наоборот, свет одновременно достигает сферической поверхности с центром в точке O' только в системе K', но не в системе K.

4.3 Относительность промежутков времени

Снова рассмотрим вагон, который движется со скоростью $\vec{v}$. Предположим, что пассажир вагона подбрасывает яблоко; оно летит вертикально вверх, возвращается, и пассажир ловит его.

В системе отсчёта вагона события «яблоко брошено» и «яблоко поймано» происходят в одной точке. Промежуток времени между этими событиями, т. е. время полёта яблока в системе отсчёта вагона, измеряется по *одним и тем же* часам, расположенным в точке броска-ловли.

Но в системе отсчёта земли наши события происходят в различных пространственных точках. Момент броска яблока фиксируется по часам, расположенным в исходной точке, а момент ловли — по *другим* часам, расположенным в той точке, куда переместится вагон за время полёта яблока. Эти двое часов синхронизированы по правилу Эйнштейна. Время полёта яблока в системе отсчёта земли — это разность показаний вторых часов в момент ловли и первых часов в момент броска.

И вот оказывается, что время полёта яблока, измеренное по вагонным часам, будет *меньше* времени полёта, измеренного по часам на земле!

Разобраться в этом не сложно. Давайте только заменим яблоко на световой сигнал, который бегает между горизонтальными зеркалами, расположенными внутри вагона (рис. 6). Тем самым мы максимально упростим себе задачу.

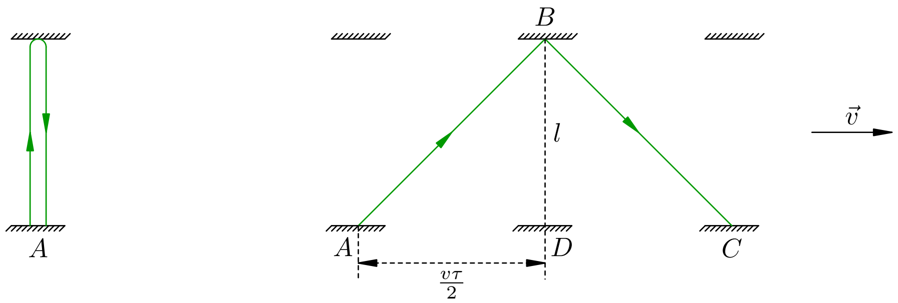

Рис. 6. Промежуток времени относителен

Сначала рассмотрим ход сигнала в системе отсчёта вагона. Сигнал выходит из точки A, идёт вертикально вверх, отражается от зеркала и возвращается назад в точку A (рис. 6, слева).

Время распространения сигнала от нижнего зеркала к верхнему и обратно, измеренное по часам A, обозначим τ_0. Если l — расстояние между зеркалами, то выполнено соотношение

$$2l = c\tau_0. \tag{5}$$

Теперь перейдём в систему отсчёта земли. Здесь сигнал будет двигаться между зеркалами по ломаной ABC (рис. 6, справа).

Время распространения сигнала от нижнего зеркала к верхнему и обратно есть разность показаний синхронизированных часов: в точке C в момент прихода сигнала и в точке A в момент его отправления. Обозначим это время через τ.

За время τ сигнал проходит путь $AB + BC$, равный $c\tau$, а вагон — путь $AC = v\tau$. По теореме Пифагора имеем: $AB^2 = AD^2 + BD^2$ или

$$\left(\frac{c\tau}{2}\right)^2 = \left(\frac{v\tau}{2}\right)^2 + l^2.$$

Умножаем это равенство на 4:

$$(c\tau)^2 = (v\tau)^2 + (2l)^2.$$

С учётом (5) получим:

$$(c\tau)^2 = (v\tau)^2 + (c\tau_0)^2.$$

Отсюда можно выразить τ через τ_0:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{6}$$

Полученная формула (6) носит совершенно общий характер. Пусть имеются две системы отсчёта K и K', причём система K' движется относительно K со скоростью v. Рассмотрим два события, которые в системе K' происходят в одной точке пространства. Время τ_0 между этими событиями в системе K' называется *собственным временем*. По часам системы K между этими событиями проходит время τ, которое связано с собственным временем соотношением (6).

Обратите внимание, что в формуле (6) собственное время τ_0 делится на величину, меньшую единицы; поэтому всегда выполнено неравенство $\tau > \tau_0$. При этом время τ оказывается тем больше, чем с большей скоростью система K' движется относительно K.

Данный эффект — так называемое *релятивистское замедление времени* — оказывается весьма существенным при скоростях, близких к скорости света. Давайте вернёмся к нашему примеру с пассажиром, подбрасывающим яблоко в вагоне. Предположим, что вагон движется со скоростью $v = 0{,}999c$, а время полёта яблока по часам пассажира равно $\tau_0 = 1$ с. Тогда на земле между подбрасыванием яблока и его ловлей пройдёт время

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}999^2}} \approx 22{,}4 \text{ с.}$$

Ну а теперь представьте, что с Земли отправляется звездолёт со скоростью $0{,}999c$. Космическое путешествие длится 10 лет по часам астронавтов. Вернувшись на Землю, астронавты обнаруживают, что попали в совершенно иную эпоху — ведь по земным часам прошло 224 года!

Звучит фантастично, но никакой фантастики тут нет — мы имеем дело со строгими фактами теории относительности. Ни с чем подобным нам сталкиваться не доводилось по той причине, что мы не умеем пока перемещаться с околосветовыми скоростями. Но как только эти скорости будут достигнуты, станет реальностью и машина времени для путешествий в будущее :-)

4.4 Относительность расстояний

При выводе формулы (6) мы неявно предполагали, что расстояние l между зеркалами одинаково как в вагоне, так и на земле. Но так ли это на самом деле? Да, это действительно так: вертикальные размеры предметов являются одними и те же как в вагонной, так и в земной системе отсчёта.

Чтобы убедиться в этом, давайте возьмём два одинаковых вертикальных стержня; один из них поместим в вагон, а другой оставим на земле. Оба стержня пусть будут на одной и той же высоте над землёй. Когда стержни поравняются друг с другом, концы одного стержня сделают засечки на другом стержне. Так вот, из принципа относительности следует, что эти засечки должны прийтись в точности на концы другого стержня.

В самом деле, пусть по засечкам оказывается, например, что вагонный стержень короче земного, т. е. движущийся стержень короче покоящегося. Но по принципу относительности инерциальные системы отсчёта полностью равноправны. Давайте перейдём в систему отсчёта вагона: там вагонный стержень будет покоиться, а земной — двигаться. Тогда получится, что движущийся стержень длиннее покоящегося. Противоречие!

Итак, *поперечные* размеры предметов одинаковы как в покоящейся, так и в движущейся системе отсчёта. Иначе обстоит дело с *продольными* размерами.

Вновь вернёмся к нашему вагону и рассмотрим стержень AB, расположенный вдоль вектора скорости вагона (рис. 7; изображать вагон надобности уже нет). Стержень, таким образом, двигается со скоростью v параллельно оси X.

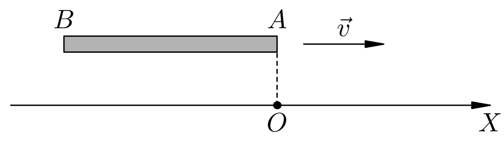

Рис. 7. Длина стержня относительна

Пусть l_0 — длина неподвижного стержня, измеренная в вагоне. Она называется *собственной длиной* стержня. Через l обозначим длину движущегося стержня, измеренную на земле.

Для нахождения соотношения между l и l_0 рассмотрим два события: 1) прохождение точки A мимо фиксированной точки O на оси X; 2) прохождение точки B мимо точки O.

В земной системе отсчёта наши события происходят в одной точке O. Промежуток времени между этими событиями по земным часам пусть равен τ_0 (это собственное время, разделяющее данные события). Очевидно, что

$$v = \frac{l}{\tau_0}\,. \tag{7}$$

В системе отсчёта вагона указанные события происходят в двух различных точках A и B. Промежуток времени между этими событиями по вагонным часам равен τ. Аналогично имеем:

$$v = \frac{l_0}{\tau}\,. \tag{8}$$

Приравнивая правые части формул (7) и (8), получим:

$$l = l_0\frac{\tau_0}{\tau}\,.$$

Но в силу формулы (6) имеем:

$$\frac{\tau_0}{\tau} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,.$$

Отсюда получаем окончательную формулу:

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{9}$$

Как видим, собственная длина l_0 умножается на величину, меньшую единицы; стало быть, длина движущегося стержня будет меньше длины покоящегося стержня. Это так называемое *лоренцево сокращение* — все тела сокращают размеры в направлении своего движения.

Подчеркнём ещё раз: *длина стержня в системе отсчёта, относительно которой стержень движется, меньше длины этого же стержня в системе отсчёта, относительно которой он покоится.* Данный эффект связан лишь с особенностями измерительных процедур, свойственных теории относительности. Никаких реальных «сжатий» в движущемся стержне, разумеется, не происходит.

4.5 Преобразования Лоренца

Теперь мы можем вывести формулы, связывающие координаты и время фиксированного события в двух различных инерциальных системах отсчёта.

Пусть снова имеются две системы отсчёта: система K и движущаяся относительно неё система K' (рис. 8). При $t = 0$ начала O и O' этих систем совпадают.

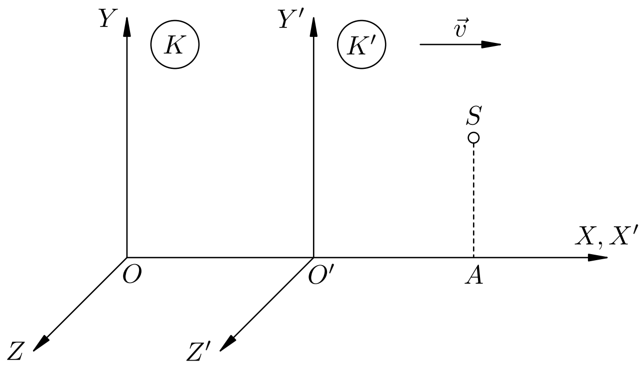

Рис. 8. К выводу преобразований Лоренца

Рассмотрим некоторое событие S (например, вспышку света). В системе K это событие происходит в точке с координатами (x, y, z) в момент времени t. В системе K' это же событие происходит в точке с координатами (x', y', z') в момент времени t'.

Как мы уже выяснили, поперечные размеры тел в обеих системах отсчёта одни и те же. Поэтому имеем: $y' = y$, $z' = z$.

Пусть A — проекция точки S на общую ось абсцисс. Найдём длину отрезка OA в системах K и K'.

В системе K отрезок OA покоится. Его длина равна x — это собственная длина данного отрезка. В системе K' отрезок OA движется со скоростью v, и его длина в силу формулы (9) равна $x\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Но с другой стороны, в системе K' длина OA равна $x' + vt'$. Следовательно,

$$x' + vt' = x\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{10}$$

Теперь аналогично найдём длину отрезка $O'A$ в системах K и K'.

В системе K' отрезок $O'A$ покоится, его собственная длина равна x'. В системе K отрезок $O'A$ движется со скоростью v, и его длина равна $x'\sqrt{1 - v^2/c^2}$. С другой стороны, длина $O'A$ в системе K равна $x - vt$. Поэтому

$$x - vt = x'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{11}$$

Из формулы (11) выразим x'. Полученное выражение подставим в (10) и выразим оттуда t'. В результате получим:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{12}$$

Формулы (12) называются *преобразованиями Лоренца*. Они дают искомую связь координат и времени события S в инерциальных системах отсчёта K и K'. Эти релятивистские формулы, вытекающие из принципов СТО, служат заменой классическим преобразованиям Галилея, опирающимся на представления о мгновенности распространения взаимодействий.

При малых скоростях движения, т. е. при $v \ll c$, мы можем считать отношение v/c равным нулю. Тогда преобразования Лоренца переходят в соотношения:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \tag{13}$$

Эти формулы есть не что иное, как преобразования Галилея. Мы видим, что преобразования Галилея служат предельным случаем преобразований Лоренца, когда скорости тел малы по сравнению со скоростью света. Поэтому при малых скоростях движения релятивистская механика Эйнштейна переходит в классическую механику Ньютона.

С системой равеств (10) и (11) можно поступить иначе. Выразим x из (10), подставим в (11) и выразим оттуда t. В результате придём к другому варианту записи преобразований Лоренца:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \dfrac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{14}$$

Формулы (12) задают переход из системы K в систему K'. Формулы (14) задают обратный переход из системы K' в систему K.

В предельном случае $v \ll c$ преобразования Лоренца (14) также переходят в преобразования Галилея:

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \tag{15}$$

Эти формулы, как легко видеть, полностью совпадают с формулами (13).

4.6 Релятивистский закон сложения скоростей

Опять рассмотрим наши системы отсчёта K и K'. Пусть точка M движется вдоль общего направления осей X и X' (рис. 9).

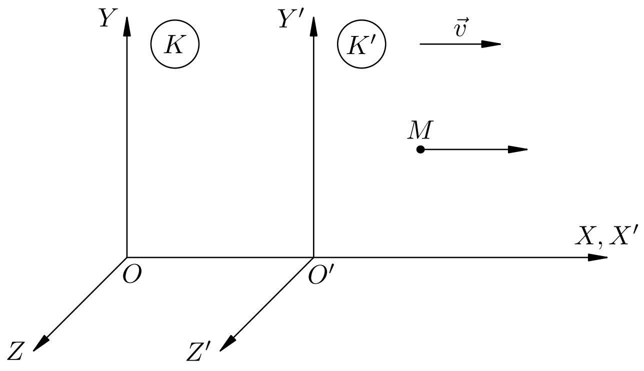

Рис. 9. К выводу закона сложения скоростей

Пусть u — скорость точки M в системе K; в системе K' скорость этой точки пусть будет u'. Как связаны друг с другом u и u'?

Давайте вспомним, как выводится соответствующая формула в классической механике. Берём первое из равенств (15) с заменой t' на t:

$$x = x' + vt.$$

Переходим к бесконечно малым приращениям координат и времени:

$$dx = dx' + vdt.$$

Делим обе части на dt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v.$$

Остаётся заметить, что $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dx'}{dt} = u'$:

$$u = u' + v. \tag{16}$$

Вот мы и получили классический закон сложения скоростей, которым неоднократно пользовались при решении задач механики.

Однако данный закон не может быть верным в теории относительности. В самом деле, рассмотрим вместо точки M световой сигнал в вакууме, мчащийся в системе K' со скоростью $u' = c$. Согласно закону (16) получится, что скорость нашего сигнала в системе K будет равна $u = c + v$. Но это противоречит принципу относительности, в силу которого скорость света в вакууме имеет одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчёта.

Возникновение данного противоречия не удивительно: ведь вывод формулы (16) базируется на преобразованиях Галилея, которые в теории относительности уступают место преобразованиям Лоренца. Поэтому правильный закон сложения скоростей нужно выводить теперь из преобразований Лоренца.

Идея вывода — та же самая, что и для формулы (16). Мы исходим из того, что

$$u = \frac{dx}{dt}\,, \quad u' = \frac{dx'}{dt'}\,. \tag{17}$$

В соотношениях (14) переходим к бесконечно малым приращениям координат и времени:

$$dx = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,, \qquad dt = \frac{dt' + \dfrac{vdx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Делим первое из данных равенств на второе:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \dfrac{vdx'}{c^2}}\,.$$

Разделим числитель и знаменатель правой части на dt':

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\dfrac{dx'}{dt'} + v}{1 + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{dx'}{dt'}}\,.$$

Остаётся учесть соотношения (17) и написать:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \dfrac{vu'}{c^2}}\,. \tag{18}$$

Это и есть *релятивистский закон сложения скоростей*, который приходит на смену классическому.

Теперь уже никакого противоречия не возникает: если скорость сигнала $u' = c$ в системе K', то в системе K его скорость равна:

$$u = \frac{c + v}{1 + \dfrac{vc}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \dfrac{v}{c}} = c,$$

как того и требует принцип относительности.

При $v \ll c$ формулы (18), как нетрудно видеть, переходят в формулы (16). Иными словами, *при малых скоростях движения релятивистский закон сложения скоростей переходит в классический закон.*

5 Релятивистская динамика

В классической динамике мы начали с законов Ньютона, потом перешли к импульсу, а после него — к энергии. Здесь мы ради простоты изложения поступим ровно наоборот: начнём с энергии, затем перейдём к импульсу и закончим релятивистским уравнением движения — модификацией второго закона Ньютона для теории относительности.

5.1 Релятивистская энергия

Предположим, что изолированное тело массы m покоится в данной системе отсчёта. Одно из самых впечатляющих достижений теории относительности — это знаменитая *формула Эйнштейна*:

$$E = mc^2. \tag{19}$$

Здесь E — энергия тела, c — скорость света в вакууме. Поскольку тело покоится, энергия E, вычиляемая по формуле (19), называется *энергией покоя*.

Формула (19) утверждает, что каждое тело само по себе обладает энергией — просто потому, что оно существует в природе. Образно говоря, природа затратила определённые усилия на то, чтобы «собрать» данное тело из мельчайших частиц вещества, и мерой этих усилий служит энергия покоя тела. Энергия эта весьма велика; так, в одном килограмме вещества заключена энергия

$$E = 1 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 9 \cdot 10^{16} \text{ Дж}.$$

Интересно, какое количество топлива нужно сжечь, чтобы выделилось столько энергии? Возьмём, например, дерево. Его удельная теплота сгорания равна $q = 10^7$ Дж/кг, поэтому находим: $m = E/q = 9 \cdot 10^9$ кг. Это девять миллионов тонн!

Ещё для сравнения: такую энергию единая энергосистема России вырабатывает примерно за десять дней.

Почему столь грандиозная энергия, содержащаяся в теле, до сих пор оставалась нами незамеченной? Почему в нерелятивистских задачах, связанных с сохранением и превращением энергии, мы не учитывали энергию покоя? Скоро мы ответим на этот вопрос.

Поскольку энергия покоя тела прямо пропорциональна его массе, изменение энергии покоя на величину ΔE приводит к изменению массы тела на

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}\,.$$

Так, при нагревании тела возрастает его внутренняя энергия, и, стало быть, масса тела увеличивается! В повседневной жизни мы не замечаем этого эффекта ввиду его чрезвычайной малости. Например, для нагревания воды массой $m = 1$ кг на $\Delta t = 100°\text{C}$ (удельная теплоёмкость воды равна $c_\text{в} = 4200$ Дж/(кг · °C)) ей нужно передать количество теплоты:

$$Q = c_\text{в} m \Delta t = 4{,}2 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Увеличение массы воды будет равно:

$$\Delta m = \frac{Q}{c^2} = \frac{4{,}2 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^{16}} \approx 4{,}7 \cdot 10^{-12} \text{ кг}.$$

Столь ничтожное изменение массы невозможно заметить на фоне погрешностей измерительных приборов.

Формула (19) даёт энергию покоящегося тела. Что изменится, если тело движется?

Снова рассмотрим неподвижную систему отсчёта K и систему K', движущуюся относительно K со скоростью v. Пусть тело массы m покоится в системе K'; тогда энергия тела в системе

K' есть энергия покоя, вычисляемая по формуле (19). Оказывается, при переходе в систему K энергия преобразуется так же, как и время — а именно, энергия тела в системе K, в которой тело движется со скоростью v, равна:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{20}$$

Формула (20) была также установлена Эйнштейном. Величина E — это *полная энергия* движущегося тела. Поскольку в данной формуле mc^2 делится на «релятивистский корень», меньший единицы, полная энергия движущегося тела превышает энергию покоя. Полная энергия будет равна энергии покоя только при $v = 0$.

Выражение для полной энергии (20) позволяет сделать важные выводы о возможных скоростях движения объектов в природе.

1. Каждое массивное тело обладает определённой энергией, поэтому необходимо выполнение неравенства
$$1 - \frac{v^2}{c^2} > 0.$$
Оно означает, что $v < c$: *скорость массивного тела всегда меньше скорости света.*

2. В природе существуют безмассовые частицы (например, фотоны), несущие энергию. При подстановке $m = 0$ в формулу (20) её числитель обращается в нуль. Но энергия-то фотона ненулевая!

   Единственный способ избежать здесь противоречия — это принять, что *безмассовая частица обязана двигаться со скоростью света.* Тогда и знаменатель нашей формулы обратится в нуль, так что формула (20) попросту откажет. Нахождение формул для энергии безмассовых частиц не входит в компетенцию теории относительности. Так, выражение для энергии фотона устанавливается в квантовой физике.

Интуитивно чувствуется, что полная энергия (20) состоит из энергии покоя и собственно «энергии движения», т. е. кинетической энергии тела. При малых скоростях движения это показывается явным образом. Используем приближённые формулы, справедливые при $\alpha \ll 1$:

$$\sqrt{1 - \alpha} \approx 1 - \frac{\alpha}{2}\,, \tag{21}$$

$$\frac{1}{1 - \alpha} \approx 1 + \alpha. \tag{22}$$

С помощью этих формул последовательно получаем из (20):

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{mc^2}{1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{v^2}{c^2}} \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2}\,. \tag{23}$$

Таким образом, при малых скоростях движения полная энергия сводится просто к сумме энергия покоя и кинетической энергии. Это служит мотивировкой для определения понятия кинетической энергии в теории относительности:

$$E_{\text{кин}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} - mc^2. \tag{24}$$

При $v \ll c$ формула (24) переходит в нерелятивистское выражение $E_{\text{кин}} = mv^2/2$.

Теперь мы можем ответить на заданный выше вопрос о том, почему до сих пор не учитывалась энергия покоя в нерелятивистских энергетических соотношениях.

Как видно из (23), при малых скоростях движения энергия покоя входит в полную энергию в качестве слагаемого. В задачах, например, механики и термодинамики изменения энергии тел составляют максимум несколько миллионов джоулей; эти изменения столь незначительны по сравнению с энергиями покоя рассматриваемых тел, что приводят к микроскопическим изменениям их масс. Поэтому с высокой точностью можно считать, что суммарная масса тел не меняется в ходе механических или тепловых процессов. В результате суммы энергий покоя тел в начале и в конце процесса попросту сокращаются в обеих частях закона сохранения энергии!

Но такое бывает не всегда. В других физических ситуациях изменения энергии тел могут приводить к более заметным изменениям суммарной массы. Мы увидим, например, что в ядерных реакциях отличия масс исходных и конечных продуктов обычно составляют доли процента. Скажем, при распаде ядра урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$ суммарная масса продуктов распада примерно на 0,1% меньше массы исходного ядра. Эта одна тысячная доля массы ядра высвобождается в виде энергии, которая при взрыве атомной бомбы способна уничтожить город.

При неупругом столкновении часть кинетической энергии тел переходит в их внутренюю энергию. Релятивистский закон сохранения полной энергии учитывает этот факт: суммарная масса тел после столкновения увеличивается!

Рассмотрим в качестве примера два тела массы m, летящих навстречу друг другу с одинаковой скоростью $3c/5$. В результате неупругого столкновения образуется тело массы M, скорость которого равна нулю по закону сохранения импульса (об этом законе речь впереди). Согласно закону сохранения энергии получаем:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{(3c/5)^2}{c^2}}}+\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{(3c/5)^2}{c^2}}}=Mc^2,$$

$$2\cdot\frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}}=Mc^2,$$

$$\frac{2m}{4/5}=M,$$

$$M=\frac{5}{2}m.$$

Мы видим, что, $M>2m$ — масса образовавшегося тела превышает сумму масс тел до столкновения. Избыток массы, равный $m/2$, возник за счёт перехода кинетической энергии сталкивающихся тел во внутреннюю энергию.

5.2 Релятивистский импульс

Классическое выражение для импульса $\vec{p}=m\vec{v}$ не годится в теории относительности — оно, в частности, не согласуется с релятивистским законом сложения скоростей. Давайте убедимся в этом на следующем простом примере.

Пусть система K' движется относительно системы K со скоростью $v=c/2$ (рис. 10). Два тела массы m в системе K' летят навстречу друг другу с одинаковой скоростью $u'=c/2$. Происходит неупругое столкновение.

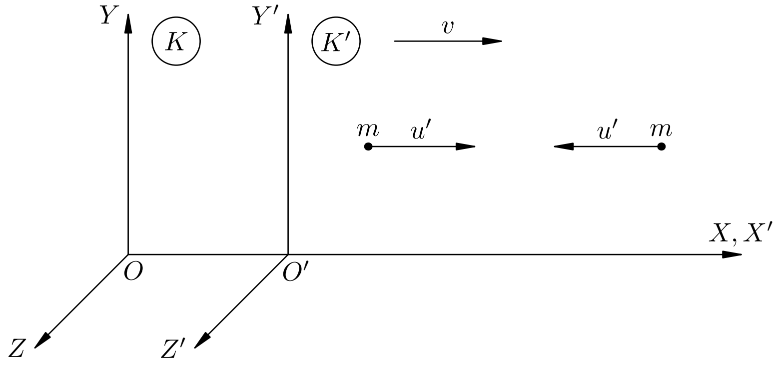

Рис. 10. К закону сохранения импульса

В системе K' тела после столкновения останавливаются. Давайте, как и выше, найдём массу M образовавшегося тела:

$$Mc^2 = 2\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{(c/2)^2}{c^2}}} = \frac{2mc^2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}} = \frac{4mc^2}{\sqrt{3}},$$

откуда

$$M = \frac{4m}{\sqrt{3}}\,.$$

Теперь посмотрим на процесс столкновения с точки зрения системы K. До столкновения левое тело имеет скорость:

$$u_1 = \frac{v+u'}{1+\dfrac{vu'}{c^2}} = \frac{c/2+c/2}{1+\dfrac{(c/2)(c/2)}{c^2}} = \frac{4c}{5}\,.$$

Правое тело имеет скорость:

$$u_2 = \frac{v-u'}{1-\dfrac{vu'}{c^2}} = \frac{c/2-c/2}{1-\dfrac{(c/2)(c/2)}{c^2}} = 0.$$

Нерелятивистский импульс нашей системы до столкновения равен:

$$mu_1 - mu_2 = \frac{4mc}{5}\,.$$

После столкновения получившееся тело массы M двигается со скоростью $v = c/2$. Его нерелятивистский импульс равен:

$$Mv = \frac{4m}{\sqrt{3}}\frac{c}{2} = \frac{2m}{\sqrt{3}}\,.$$

Как видим, $mu_1 - mu_2 \neq Mv$, то есть нерелятивистский импульс не сохраняется.

Оказывается, правильное выражение для импульса в теории относительности получается делением классического выражения на «релятивистский корень»: импульс тела массы m, двигающегося со скоростью $\vec{v}$, равен:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{25}$$

Давайте вернёмся к только что рассмотренному примеру и убедимся, что теперь с законом сохранения импульса всё будет в порядке.

Импульс системы до столкновения:

$$p_{\text{до}} = \frac{mu_1}{\sqrt{1-\dfrac{u_1^2}{c^2}}} - \frac{mu_2}{\sqrt{1-\dfrac{u_2^2}{c^2}}} = \frac{m(4c/5)}{\sqrt{1-\dfrac{(4c/5)^2}{c^2}}} - 0 = \frac{4mc/5}{3/5} = \frac{4mc}{3}\,.$$

Импульс после столкновения:

$$p_{\text{после}} = \frac{Mv}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{Mc/2}{\sqrt{1-\dfrac{(c/2)^2}{c^2}}} = \frac{(4m/\sqrt{3})(c/2)}{\sqrt{3}/2} = \frac{4mc}{3}\,.$$

Вот теперь всё правильно: $p_{\text{до}} = p_{\text{после}}$!

5.3 Связь энергии и импульса

Из формул (20) и (25) можно получить замечательное соотношение между энергией и импульсом в теории относительности. Возводим обе части этих формул в квадрат:

$$E^2 = \frac{m^2c^4}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\,, \quad p^2 = \frac{m^2v^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\,.$$

Преобразуем разность:

$$E^2 - p^2c^2 = \frac{m^2c^4}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} - \frac{m^2v^2c^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2c^2(c^2-v^2)}{\dfrac{c^2-v^2}{c^2}} = m^2c^4.$$

Это и есть искомое соотношение:

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4. \tag{26}$$

Данная формула позволяет выявить простую связь между энергией и импульсом фотона. Фотон имеет нулевую массу и движется со скоростью света. Как уже было замечено выше, сами по себе энергия и импульс фотона в СТО найдены быть не могут: при подстановке в формулы (20) и (25) значений $m = 0$ и $v = c$ мы получим нули в числителе и знаменателе. Но зато с помощью (26) легко находим: $E^2 - p^2c^2 = 0$, или

$$E = pc. \tag{27}$$

В квантовой физике устанавливается выражение для энергии фотона, после чего с помощью формулы (27) находится его импульс.

5.4 Релятивистское уравнение движения

Рассмотрим тело массы m, движущееся вдоль оси X под действием силы F. Уравнение движения тела в классической механике — это второй закон Ньютона: $ma = F$. Если за бесконечно малое время dt приращение скорости тела равно dv, то $a = dv/dt$, и уравнение движения запишется в виде:

$$m\frac{dv}{dt} = F. \tag{28}$$

Теперь заметим, что $mdv = d(mv) = dp$ — изменение нерелятивистского импульса тела. В результате получим «импульсную» форму записи второго закона Ньютона — производная импульса тела по времени равна силе, приложенной к телу:

$$\frac{dp}{dt} = F. \tag{29}$$

Все эти вещи вам знакомы, но повторить никогда не помешает ;-)

Классическое уравнение движения — второй закон Ньютона — является инвариантным относительно преобразований Галилея, которые в классической механике описывают переход из одной инерциальной системы отсчёта в другую (это означает, напомним, что при указанном переходе второй закон Ньютона сохраняет свой вид). Однако в СТО переход между инерциальными системами отсчёта описывается преобразованиями Лоренца, а относительно них второй закон Ньютона уже не является инвариантным. Следовательно, классическое уравнение движения должно быть заменено релятивистским, которое сохраняет свой вид под действием преобразований Лоренца.

То, что второй закон Ньютона (28) не может быть верным в СТО, хорошо видно на следующем простом примере. Допустим, что к телу приложена постоянная сила. Тогда согласно классической механике тело будет двигаться с постоянным ускорением; скорость тела будет линейно возрастать и с течением времени превысит скорость света. Но мы знаем, что на самом деле это невозможно.

Правильное уравнение движения в теории относительности оказывается совсем не сложным. *Релятивистское уравнение движения имеет вид* (29), *где p — релятивистский импульс:*

$$\frac{d\left(\dfrac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)}{dt} = F. \tag{30}$$

Производная релятивистского импульса по времени равна силе, приложенной к телу.

В теории относительности уравнение (30) приходит на смену второму закону Ньютона.

Давайте выясним, как же в действительности будет двигаться тело массы m под действием постоянной силы F. При условии $F = \text{const}$ из формулы (30) получаем:

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = Ft.$$

Остаётся выразить отсюда скорость:

$$v = \frac{cFt}{\sqrt{F^2t^2 + m^2c^2}}\,. \tag{31}$$

Посмотрим, что даёт эта формула при малых и при больших временах движения. Пользуемся приближёнными соотношениями при $\alpha \ll 1$:

$$\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}\,, \tag{32}$$

$$\frac{1}{1 + \alpha} \approx 1 - \alpha. \tag{33}$$

Формулы (32) и (33) отличаются от формул (21) и (22) только лишь знаком в левых частях. Постарайтесь запомнить все эти четыре приближённых равенства — они часто используются в физике.

Итак, начинаем с малых времён движения. Преобразуем выражение (31) следующим образом:

$$v = \frac{cFt}{mc\sqrt{1 + \dfrac{F^2t^2}{m^2c^2}}}\,.$$

При малых t имеем:

$$\frac{F^2t^2}{m^2c^2} \ll 1.$$

Последовательно пользуясь нашими приближёнными формулами, получим:

$$v \approx \frac{cFt}{mc\left(1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{F^2t^2}{m^2c^2}\right)} \approx \frac{Ft}{m}\left(1 - \frac{F^2t^2}{2m^2c^2}\right).$$

Выражение в скобках почти не отличается от единицы, поэтому при малых t имеем:

$$v \approx \frac{Ft}{m} = at\,.$$

Здесь $a = F/m$ — ускорение тела. Мы получили результат, хорошо известный нам из классической механики: скорость тела линейно растёт со временем. Это и не удивительно — при малых временах движения скорость тела также невелика, поэтому мы можем пренебречь релятивистскими эффектами и пользоваться обычной механикой Ньютона.

Теперь переходим к большим временам. Преобразуем формулу (31) по-другому:

$$v \approx \frac{cFt}{Ft\sqrt{1 + \dfrac{m^2c^2}{F^2t^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \dfrac{m^2c^2}{F^2t^2}}}\,.$$

При больших значениях t имеем:

$$\frac{m^2c^2}{F^2t^2} \ll 1,$$

и тогда:

$$v \approx \frac{c}{1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{m^2c^2}{F^2t^2}} \approx c\left(1 - \frac{m^2c^2}{2F^2t^2}\right).$$

Хорошо видно, что при $t \to \infty$ скорость тела v неуклонно приближается к скорости света c, но всегда остаётся меньше c — как того и требует теория относительности.

Зависимость скорости тела от времени, даваемая формулой (31), графически представлена на рис. 11.

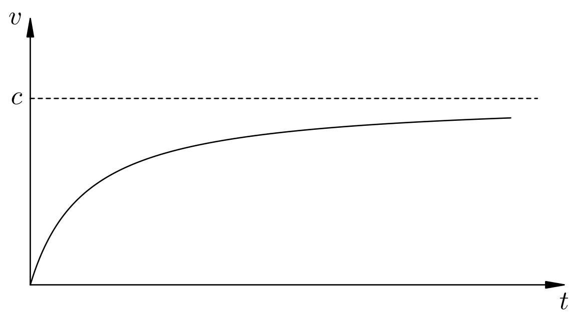

Рис. 11. Разгон тела под действием постоянной силы

Начальный участок графика — почти линейный; здесь пока работает классическая механика. Впоследствии сказываются релятивистские поправки, график искривляется, и при больших временах наша кривая асимптотически приближается к прямой $v = c$.